Лінійна алгебра

Група 121
Викладач Котова О.
24.03.2020 р.

Лекція

Тема: Ортогональне доповнення підпростору.

План

1. Означення вектора ортогонального підпростору.
2. Достатня умова ортогональності вектора підпростору.
3. Означення ортогональних підпросторів.
4. Достатня умова ортогональності двох підпросторів.
5. Означення ортогонального доповнення підпростору.
6. Теорема про пряму суму підпростору та його ортогонального доповнення.
7. Ізоморфізм евклідового просторів.

Короткий зміст лекції:

Нехай U - деякий підпростір евклідового простору E_n.

Означення. Вектор $\vec{a} \in E_n$ називають ортогональним підпростору $U(\vec{a} \perp U)$, якщо він ортогональний до будь-якого вектора цього підпростору.

Теорема 1. Для того, щоб вектор $\vec{a}$ був ортогональним підпростору U, достатньо, щоб він був ортогональним кожному вектору деякого базису цього підпростору.

Означення. Підпростори U і V простору E називають ортогональними $(U \perp V)$, якщо кожний вектор $\vec{u} \in U$ ортогональний кожному вектору $\vec{v} \in V$.

Теорема 2. Для того щоб підпростори U і V простору E були ортогональними, достатньо, щоб кожний вектор деякого базису підпростору U був ортогональний кожному вектору деякого базису підпростору V.

Перетин ортогональних підпросторів U і V є нульовий підпростір $\{0\}$.

Дійсно, якщо $\vec{a} \in U \cap V$, то $\vec{a} \in U$ і $\vec{a} \in V$, але тоді $(\vec{a},\vec{a}) = 0$ і, отже, $\vec{a} = \vec{0}$.

Позначимо символом $U^{\perp}$ сукупність всіх векторів простору E, ортогональних підпростору U; $U^{\perp}$ є підпростір простору E. Дійсно, $\forall \lambda \in R \ \ \forall \vec{a}, \vec{b} \perp U$ маємо: $\vec{a} \perp U \wedge \vec{b} \perp U \rightarrow (\vec{a} + \vec{b}) \perp U \wedge \lambda\vec{a} \perp U$.

Означення. Підпростір $U^{\perp}$ всіх векторів простору E, ортогональних підпростору U, називається ортогональним доповненням підпростору U.

Теорема 3. Евклідів простір E_n є пряма сума будь-якого свого підпростору U та його ортогонального доповнення $U^{\perp}$:

$$E_n = U \oplus U^{\perp}.$$

Доведення: Якщо $U = E_n$ або $U = \{0\}$, то теорема очевидна, оскільки $E_n^{\perp} = \{0\}$, а $\{0\}^{\perp} = E_n$.

Нехай U - будь-який відмінний від E_n та $\{0\}$ підпростір простору E_n, а $U^{\perp}$ - його ортогональне доповнення.

У підпросторі U вибираємо деякий ортогональний базис

$$\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_S,$$

а у підпросторі $U^{\perp}$ - ортогональний базис

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k.$$

Система векторів

$$\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_S, \vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k \qquad (*)$$

ортогональна і тому лінійно незалежна. Покажемо, що вона є базисом в просторі E_n.

Припустимою що це не так.

Тоді існує вектор $\vec{b} \in E_n$, який не є лінійною комбінацією векторів системи (*).

За допомогою процесу ортогоналізації знайдемо відмінний від $\vec{0}$ вектор:

$$\vec{c} = \mu_1\vec{u}_1 + ... + \mu_S\vec{u}_S + \eta_1\vec{v}_1 + ... + \eta_k\vec{v}_k + \vec{b},$$

ортогональний кожному вектору системи (*).

Вектор $\vec{c} \perp U$ і не належить $U^{\perp}$, оскільки система векторів $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k, \vec{c}$ як ортогональна система лінійно незалежна. Отже, простір $U^{\perp}$ не є ортогональним доповненням підпростору U.

Припущення, що система (*) не є базисом простору E_n, приводить до суперечності і тому воно невірне.

Оскільки (*) є базис E_n, то кожний вектор $\vec{a} \in E_n$ можна записати у вигляді

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{S} \lambda_i \vec{u}_i + \sum_{j=1}^{k} \mu_j \vec{v}_j = \vec{u} + \vec{v},$$

де $\vec{u} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \vec{u}_i$; $\vec{v} = \sum_{j=1}^{k} \mu_j \vec{v}_j$; $\vec{u} \in U$; $\vec{v} \in U^{\perp}$.

Тому $E_n = U + U^{\perp}$.

Але $U \cap U^{\perp} = \{0\}$, оскільки $U \perp U^{\perp}$. Отже,

$$E_n = U \oplus U^{\perp}.$$

Теорему доведено.

З доведеної теореми випливає, що

$$\dim E_n = \dim U + \dim U^{\perp}.$$

Якщо $E_n = U \oplus U^{\perp}$, то будь-який вектор $\vec{x} \in E_n$ однозначно зображується у вигляді

$$\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}, \text{ де } \vec{y} \in U; \ \vec{z} \in U^{\perp}.$$

Використовується при цьому наступна термінологія:

$\vec{x}$ - похила до простору U,

$\vec{y}$ - проекція вектора $\vec{x}$ на U,

$\vec{z}$ - перпендикуляр, опущений з вектора $\vec{x}$ на підпростір U, а довжина $|\vec{z}|$ вектора $\vec{z}$ - відстань вектора $\vec{x}$ до U, кут φ між векторами $\vec{x}$ і підпростором U - це кут між вектором $\vec{x}$ та його проекцією на підпростір U, тобто

$$\varphi = \arccos \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}.$$

Нехай E і E' - евклідові простори.

Означення. Евклідові простори E і E' називаються *ізоморфними*, якщо між їх векторами можна встановити таку взаємно однозначну відповідність, що якщо вектору $\vec{a} \in E$ ставиться у відповідність вектор $\vec{a}' \in E'$, а вектору $\vec{b} \in E$ - $\vec{b}' \in E'$, то

1. сумі векторів $\vec{a} + \vec{b}$ ставиться у відповідність $\vec{a}' + \vec{b}'$;
2. добутку $\lambda \vec{a}$, де $\lambda \in R$ - вектор $\lambda \vec{a}'$;
3. скалярні добутки відповідних пар векторів рівні між собою: $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}', \vec{b}')$.

Інакше, простори E і E' називаються ізоморфними, якщо між ними як векторними просторами існує ізоморфна відповідність, яка зберігає скалярний добуток відповідних пар векторів.

Теорема 4. Будь-які два скінченновимірні евклідові простори однакової розмірності ізоморфні.

Доведення: Нехай E_n і E_n' - евклідові простори розмірності n.

Вибираємо в E_n ортонормований базис з векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$, а в E_n' - ортонормований базис $\vec{e}_1', \vec{e}_2', ..., \vec{e}_n'$.

Кожному вектору $\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i \in E_n$ поставимо у відповідність вектор $\vec{a}' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i' \in E_n'$.

Цим встановлена ізоморфна відповідність між просторами E_n і E_n'.

Покажемо, що при цьому зберігається скалярний добуток відповідних пар векторів.

Нехай $\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i$, $\vec{b} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{e}_i$ - будь-які вектори з E_n. В просторі E_n' їм відповідають вектори $\vec{a}' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i'$ і $\vec{b}' = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{e}_i'$.

Оскільки базиси векторів E_n і E_n' ортонормовані, то $(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = (\vec{a}', \vec{b}')$, тобто $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}', \vec{b}')$.

Отже, евклідові простори E_n і E_n' ізоморфні.

З теореми випливає, що всі n-вимірні евклідові простори ізоморфні арифметичному n-вимірному векторному простору.

Контрольні питання для самоперевірки

1. Що називається ортогональним доповненням $M^{\perp}$ до підпростору M евклідового простору E?

2. Чи є $M^{\perp}$ підпростором евклідового простору E?
3. Як пов'язані між собою розмірності M і $M^{\perp}$?
4. Як пов'язані між собою базиси M, $M^{\perp}$ і E_n?
5. Що означає запис $E_n = M \oplus M^{\perp}$?
6. Чи справедливе твердження: для будь-якого підпростору M евклідового простору E_n $M \oplus M^{\perp} = E_n$?
7. Доведіть, що ортогональне доповнення $(U+V)^{\perp}$ суми $U+V$ підпросторів U і V евклідового простору збігається з перетином $U^{\perp} \cap V^{\perp}$ ортогональних доповнень $U^{\perp}$ і $V^{\perp}$ підпросторів U і V.
8. Знайдіть базис ортогонального доповнення $U^{\perp}$ підпростору U, що є лінійною оболонкою векторів $\vec{x}_1 = (1, 0, 2, 1)$, $\vec{x}_2 = (2, 1, 2, 3)$, $\vec{x}_3 = (0, 1, -2, 1)$.
9. Знайдіть ортогональну проекцію $\vec{y}$ і ортогональну складову $\vec{z}$ вектора $\vec{x} = (8, 5, -3, 6)$ на лінійний простір U, що є лінійною оболонкою векторів $\vec{u}_1 = (1, -1, -1, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, -2, 0, 1)$, $\vec{u}_3 = (1, -4, 2, 1)$.
10. Знайти відстань від точки, заданої вектором $\vec{x}$ до лінійного многовиду P, якщо $\vec{x} = (2, 4, -4, 2)$, P задано системою лінійних рівнянь:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$$
11. Довести, що при ізоморфній відповідності між евклідовими просторами E і E':
    а) ортогональна система векторів з E переходить в ортогональну систему векторів з E';
    б) ортогональна система векторів з E переходить в ортонормовану систему з E';
    в) підпростору $U^{\perp}$ відповідає ортогональне доповнення $(U')^{\perp}$ підпростору U' з простору E', де U' - підпростір простору E', який відповідає підпростору U з E

Література:

1. Л. Я. Куликов, Алгебра и теория чисел. – М.: Высш.школа, 1979, Гл. 7, §6
2. С. Г. Завало та інші, Алгебра і теорія чисел, Ч. І – К.: Вища шк., 1997, Гл. 7 §31.5; 31.6.